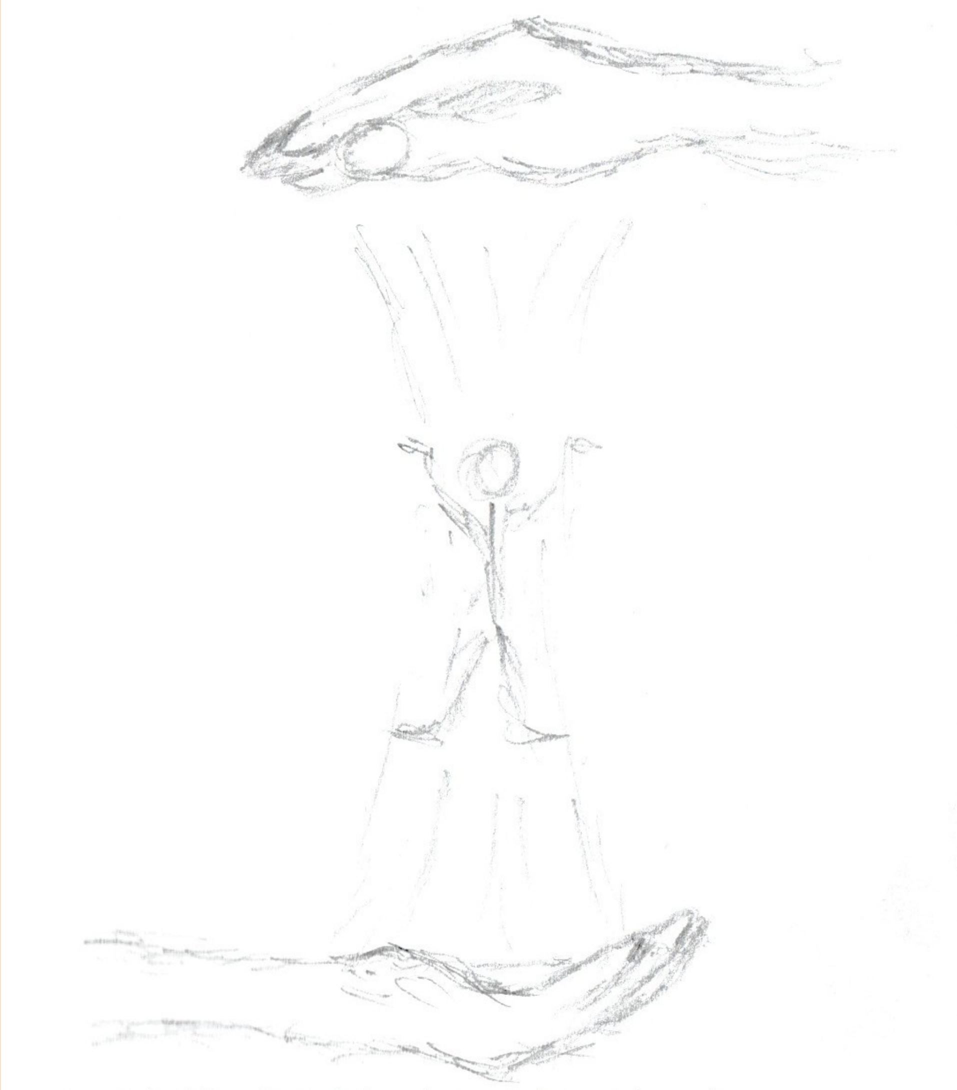
2 - 1 = 3



Mathe, Physik, Chaos und was das alles mit Sport⚽, Musik🎶 & dem Leben† zu tun hat...

geschrieben und illustriert von manù Sacré

Oder einfach: Lustiges Mathe-Büchelchen™

Mathematik! Das ist doch das mit den Zahlen, oder?

Prinzipiell ja, also Zahlen an sich und deren Verknüpfungen.
Aber was sind Zahlen eigentlich? Eins, zwei, drei... Und so weiter! Um Plätzchen zu zählen. Klar!

Oder auch: 1 — 2 — 3... zum Einzählen des Rhythmus in der Musik...
Und: 1 + 2 = 3. Plus ist eine der Verknüpfungen von Zahlen oder auch 'Operationen', hier der Prozess des Zusammen-Zählens. Ist-gleich steht für Balance wie bei einer Waage.

Zusammen-Zählen geht so:

Mit den Fingern links 1-2-3-0-0
Hand—innen \ | | ↓ ↓

Und den Fingern rechts 1-2-3-4-0
Hand—außen \ | | ı ↓

Oder fortlaufend 1-2-3-1-2 3-4-0-0-0
innen—außen \ | | ı ı \ | ↓ ↓ ↓

Jetzt durchgezählt 1-2-3-4-5 6-7-0-0-0
innen—außen \ | | ı ı \ | ↓ ↓ ↓

Also 3 + 4 = 7 ✓

Die Finger sind wahrscheinlich der Grund, warum wir in Zehner-Einheiten zählen. An sich ist das willkürlich und gleichwertig zu allen anderen Zählsystemen wie z.B. binär oder hexadezimal...

1,2,3... sind außerdem auch nicht die Zahlen selbst, sondern deren wiederum willkürliche Benennungen oder dafür verwendete Symbole. Was man damit meint ist vielmehr das "Prinzip Eins" oder das "Prinzip Zwei", das ja eher eine dem Leben innewohnende Idee oder vielleicht auch nur eine Vorstellung davon ist, ein Ausdruck für einen Zustand der Einsamkeit oder Zweisamkeit oder auch bei Formeln einer Veränderung...

Ich könnte ja zum Beispiel sagen:
2 ist jetzt drei und 3 ist jetzt zwei. Nur ein Umbenennen! Und schon ist
1 + 2 = 4 oder 2 - 1 = 3. Verrückt, oder?

Trotzdem bleibt die Einsamkeit die Einsamkeit und die Zweisamkeit die Zweisamkeit.

Bleiben wir also bei der üblichen Bezeichnung und es gilt wieder 1 + 2 = 3. Das ist ein spezieller, konkreter Fall, von denen es etliche gibt.

Mathematiker versuchen das Ganze deshalb allgemeiner zu fassen und benutzen Variablen. Dann heißt die Gleichung oder physikalisch Formel: $a + b = c$.

Das Gebilde kann man nun auch je nach Bedarf umstellen, indem man auf beiden Seiten das Gleiche macht, also die Balance behält:
$a + b = c \quad | -a$ minus* als 'Operation'
$b = c - a$

* Minus ist das Gegenstück zu Plus... Yin & Yang! Es bedeutet Voneinander-Abziehen.

Wozu das alles?
Wenn ich auf dem Kaffee-Tisch $c = 7$ Plätzchen zähle und Person A mir mitteilt, daß sie $a = 4$ Plätzchen mitgebracht hatte, dann kann ich nun mit $b = 7 - 4 = 3$ die Anzahl der von Person B mitgebrachten Plätzchen ermitteln.

Ein weiteres Szenario:
Ist Person A noch mit einer Begleitung erschienen, die beide gleich viele Plätzchen mitbrachten, also rechnen wir 2mal a, ergibt sich als Gleichung $2 \bullet a + b = c$. 'Zwei mal a' ist Multiplikation und bedeutet Vervielfachen.
Mit weiterhin $c = 7$ und $b = 3$ haben die beiden zusammen $c - b = 7 - 3 = 4$ Plätzchen mitgebracht, also:

$2 \bullet a = 4 \quad | :2$ geteilt* als 'Operation'

* Geteilt ist das Gegenstück zu Mal und bedeutet Aufteilen! ☯

Daraus ergibt sich sofort und unter allen Umständen für den neuen Fall $a = 2$. Jeweils zwei Plätzchen!
Denn $2 \bullet a :2 = a$ und $4 :2 = 2$. Odr?

Odr? ist ein Trick der Schweizer, um niemals absolute Aussagen machen zu müssen. Absolute Aussagen sind nämlich meist relativ falsch?! Mehr zur Relativität vielleicht später...

Möchte ich nun wissen wie viele Kekse d die Gäste durchschnittlich∅ beigesteuert haben, teile ich die Anzahl der Kekse c durch die Zahl beteiligter Personen e:

$d = c : e$
$= 7 : 3$
= Hoppala, das geht ja gar nicht...

Wie im echten Leben gibt's auch in der Mathematik - oder gerade hier - nicht nur Ganze, sondern auch "a Halbe" wie der Bayer sagt (hochdeutsch: ein Halbes*), zwei

Drittel usw. sogenannte Brüche. Damit kommen wir von natürlichen Zahlen zum erweiterten Bereich der rationalen Zahlen.

*Damit ist für gewöhnlich ein Glas mit einem halben Liter Bier darin gemeint.

7 : 3 = ?

6 : 3 = 2   bleibt also
1 : 3 = 1/3   oder ⅓

Sind zusammen:
7 : 3 = 2 ⅓

Also in Worten Zwei und ein Drittel…

Da drängt sich geradezu die Frage auf: Was war wohl zuerst — Das Wort oder die Zahl?

Vielleicht besteht im Grunde die Schöpfung ja aus Zahlen oder Prinzipien. Wir wissen es nicht so genau!

Die Bibel sagt ja: 'Am Anfang war das Wort'. Das ist für unseren Verstand allerdings schwer vorstellbar. Und das ist eventuell auch schon der Trick: Für Etwas, das offensichtlich passiert ist, man es aber mit unseren menschlichen Mitteln nicht erfassen kann, trifft man eine absurde Aussage, um diesem Umstand gerecht zu werden. Das erinnert auch an koans aus östlichen Traditionen.

Anstatt also auf gut hessisch zu sagen "Mer waases ned" (hochdeutsch: Man weiss es nicht), macht man elegant auf die eigene Beschränktheit aufmerksam...

Der modernsten Form im Versuch einer Beschreibung unserer Welt, der Quanten-Mechanik⚛, passiert auch etwas ganz ähnliches... Was mit der Unbestimmbarkeit in der Heisenberg'schen Unschärfe-Relation begann, gipfelt nun in der Reduktion der Aussagen auf Wahrscheinlichkeiten. Man weiss zwar etwas mehr als nichts, aber andererseits ist es erschreckend wenig im Vergleich zur Illusion der völligen Bestimmbarkeit im mechanistischen Weltbild zu Newton's Zeiten.

Auch schwer verständlich ist die dezimale Schreibweise von 2 ⅓.
Das nennt sich '2 Komma Periode 3' und heißt, dass die drei nach dem Komma unendlich wiederholt wird:

2,3333333333333333...........

Man schreibt es auch $2,\overline{3}$ und der Strich über der Zahl deutet die Wiederholung an.

Man kann 2 ⅓ einfach mal mit dem gängigen Schema der Division ausrechnen, denn der Bruchstrich bedeutet ja 'geteilt'. Dann wird klar, dass wir tatsächlich Unendlichkeit erfahren können.

Zwei und ein Drittel sind

  2 + 1/3   in Zahlen
= 6/3 + 1/3   gleicher Nenner (untere Zahl)
= (6 + 1)/3   Addition Zähler (obere Zahl)
= 7/3 oder 7:3

Das war die ursprüngliche Aufgabe!

Nun die Division:

  7 : 3 = 2...
  6
  Rest 1

  1 : 3   schwierig

oder   1 : 3 = ?
<=>   10 : 3 = 3,… | :10
    9
    Rest 1

Wie man leicht sieht, gilt also

    1 : 3 = 0,3…

0,… bedeutet, dass ich mich hier im Bereich der 'Zehntel' befinde !
<=> bedeutet äquivalent, gleichwertig.

Mit dem Rest von 1 beginnt das Spiel von vorn — endlos…
Man erhält 1 : 3 = 0,33333…

Cogito ergo sum* 2 ⅓ = $2{,}\overline{3}$

* Ich denke, also summiere ich…

Umgekehrt ein einfacheres, weil endliches Beispiel ¾.

Ausgerechnet 0,75
   / \   \
Ganze Zehntel Hundertstel ☝/💯

7 Zehntel und 5 Hundertstel...

  7/10 + 5/100
= 70/100 + 5/100
= 75/100 | :25 kürzen*
= 3/4 oder ¾

* Herunter-Rechnen auf die einfachste Form!

Erstaunlicherweise gehen die Zahlen auch noch in den Keller!
<= 0, ⅛, ¼, ⅓, ⅖, ½, ⅗, ¾, ⅝, 1, 2, 2⅓, 3, 7…

Beispielhaft, Zauberhaft
-7, -4, -2⅓, -1, -¾, -⅓, 0, ⅛...

Und sind die "negativen" Zahlen wirklich negativ?

Rechnerisch ist es das Gleiche wie im Positiven, abgesehen vom 'minus'...
Wenn aus einem Raum 3 Leute raus gehen und 2 Leute wieder zurück kommen und hinein gehen, sind dann -1 Leute im Raum?

Oder wenn in einen Raum 5 Leute rein gehen und 7 Leute wieder herauskommen...
Wie viele Leute sind dann drin?

Da die materielle Welt offenbar polar gestaltet ist, gibt es zu jedem Teil das Gegen-Teil.
Zu jeder Zahl das Gegenstück.

Ob das in der nicht-materiellen Welt auch so ist ??? ← die drei sollen das rausfinden😄

Die Quanten-Physik kennt jedenfalls Antimaterie, sogar schwarze Energie und ko-relierte Teilchen...

Da wir Menschen uns ja angeblich in der Erbsünde befinden und damit ohnehin verschuldet sind, könnte man die "schwarzen" Zahlen ja auch in diesem Sinne interpretieren...

Nota bene: Genau genommen ist die Erbsünde eine von Generation zu Generation weitergegebene verqueere Illusion über sich und die Welt. Odr?

Und dann will einem der "Teufel" - den es in Echt gar nicht gibt - einreden, dass man nicht gut genug ist. Und so läuft man sich dann tot im Hamsterrad des Sich-Beweisens und Konkurrierens...

Wenn es den Teufel gibt, ist man es vielleicht am ehesten selbst, also jagt man den Teufel am besten zum Teufel und wird ein Engel, um Gott zu gefallen und nicht den Menschen…

Gott —in welcher Form auch immer— ist auf jeden Fall wahrscheinlicher als der Teufel😈

Die Quanten-Physik hat übrigens zumindest nicht in erster Linie mit Füßen zu tun. Quanten sind noch nicht einmal physische Teilchen, sondern vielmehr Energie-Portiönchen, gequantelte Energie. Eine weitere der Entdeckungen, die dazu führten, das mechanistische Weltbild zu hinterfragen und dessen Beschränktheit zu erkennen.

Apropos Füße, oder Physe?
Jesus hat ja den Jüngern die untersten Extremitäten gewaschen und damit ein weiteres Zeichen der Wertschätzung für uns Menschen gesetzt. Ob man das nun nachmachen muss? Dann müsste man ja auch im Tempel die Tische umschmeissen...

Und in einer 13köpfigen, wohnsitzlosen Männer-WG leben, zusammen mit einem Lieblings-Jünger!

Das alles sind aber weltliche Aspekte. Interessanter ist ja der Verweis auf die Macht der Worte und damit auf Dimensionen, die über das Weltliche und unsere Vorstellung über die Zusammenhänge der Schöpfung weit hinausgehen...

"Wer ohne Sünde ist, werfe den ersten Stein."

Ich finde es faszinierend, wie Jesus durch einen einzigen Satz, eine ausweglose Situation bereinigt und damit die angeklagte Hebräerin vor der (Todes-)Strafe, sich selbst aus der gestellten Falle rettet und außerdem noch den Anklägern einen Spiegel vorhält, ihnen dadurch den Weg zum persönlichen Wachstum anbietet...

Jetzt bin ich aber abgeschwoffen...

x□ = x^2

$a + a + a = 3 \cdot a$
So wird aus Addition Multiplikation!

$3a \cdot 3a = 3^2a^2 = 9a^2$
So wird aus Multiplikation Potenzieren, in diesem Fall Quadrieren, also 2mal (eigentlich 1mal) mit sich selbst mal-nehmen. Das alles geht natürlich auch 3mal: $a^3 = a \cdot a \cdot a$.
Und n-mal...
a hoch 0 ist eins, also $a^\circ = 1$ für alle möglichen a's.
Nachtrag $a \div 0 = \infty$.

Das Gegenstück zum Potenzieren ist Radizieren. Das hat tatsächlich etwas mit Radi zu tun, weil der Radi ja quasi eine Wurzel ist. Man nennt die Operation auf deutsch auch Wurzel-Ziehen. Back to the Roots! Tipp: Nur mit positiven, ganzen Zahlen oder Variablen anwenden! Zu Gefahren und Nebenwirkungen fragen sie am besten jemand, der sich damit auskennt.

$\sqrt{9} = 3$ zum Beispiel!
Genau genommen $\sqrt[2]{9} = 3$. Die Quadratwurzel!
Es gibt ja auch noch $\sqrt[3]{27} = 3$!
Und noch genauer: $\sqrt[2]{9} = \pm 3$!
Zwei Lösungen !!!

Apropos !
3! = 3•2•1 = 6

Nur der Vollständigkeit halber:

‘3 Fakultät’ ist 3•2•1
Immer mal-nehmen mit den darunter verfügbaren Zahlen.

Was dazu das Gegenstück ist?
???

Vielleicht 3¡ = 3:2:1 = 3Halbe und nennt sich ‘3 Discipulus’.

Die Wege des Herrn sind untergründig...

Kommen wir lieber zu den Gleichungen zurück! Diese werden durch die potenzierte Schreibweise zumindest optisch übersichtlicher — wie wir noch sehen werden.
Eine einfache Gleichung ist ja y = 1.

Grafisch sieht das dann so aus:
Man trägt y zum Beispiel auf der vertikalen Achse auf

```
y
   |
   |_______
 1 |__ __ __
     1  2  3   x
```

y ist hier immer eins, egal wo man auf der x-Achse horizontal hin wandert. q.e.d.

y = x lässt sich hier in guter Näherung wie folgt darstellen. Es ist die Winkelhalbierende der beiden Achsen.

In etwa so…

```
y
   |        Δ
   |    Δ
 1 | Δ __ __ __
       1  2  3   x
```

Oder so…

```
y
   |         •
   |     •
 1 | • ___ ___ ___
      1    2    3     x
```

y hat bei dieser Gleichung oder Funktion immer den gleichen Wert wie x.

$y = 2x + b$

```
y
   |   /
   | /        b = 1
 1 | ___ ___ ___
       1    2    3    x
```

y ist das Doppelte von x, also ist die Steigung in der Grafik steiler als zuvor.
+b verschiebt alles nach oben...

$$y = x^2 + b$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x) = x^2 + b$$

f(x) ist lediglich eine andere Schreibweise der Gleichung als Funktion, in diesem Fall einer Funktion von x.

```
y         /
   |    /
   | ✓          b = 1
 1 | ___ ___ ___
       1    2    3    x
```

```
f(x)         /
      |    /
      | ✓          b = 1
    1 | ___ ___ ___
          1    2    3    x
```

In dieser Darstellung ist sogar $f(x) = (x-½)^2 + b$ treffender.

$f(x) = x^n + b$ mit n ¢ IN

n ¢ IN bedeutet n Element aus IN. IN bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen. n ist also eine natürliche Zahl. Memories...

```
f(x)      /
     |   /      n = 3
     |✓         b = 1
   1 |__ __ __
        1  2  3    x
```

$f(x) = (x-½)^n + b$

$f(n) = (x-½)^n + b$

```
f(n)        /
     |     /      x = 2½
     | ✓          b = 0
 __1|__ __ __
     |  1  2  3    n
```

Ergänzung:
x hoch -1 $x^{-1} = 1/x$
x hoch ½ $x^{1/2} = \sqrt{x}$

Vorerst machen wir aber mal Schluss damit, sonst wird's zu komplex! iiiiiiih...

Auf den geschaffenen Grundlagen schauen wir nun ein paar Anwendungen von Gleichungen und Funktionen als Formeln an:

Es geht um den Kreis…
Es geht rund!

$U = 2 \bullet \pi \bullet r$ Umfang eines Kreises
$A = \pi \bullet r^2$ Fläche eines Kreises (Areal)
$\pi = 3{,}1415.....$ Kreis-Konstante

r ist der Radius, die Strecke Mitte — Rand. Nicht zu verwechseln mit dem französischen Politiker! C'est la vie!

π ist sowas wie eine Natur-Konstante und eine unendliche, aber nicht-periodische Zahl. Es gibt Menschen, die mehrere Tausend Nach-Komma-Stellen auswendig gelernt haben… Vielleicht wirkt das ja wie ein Mantra!?

Grafisch sieht das ähnlich wie f(x) = 6x aus.
Der Umfang wächst linear mit einem Vielfachen des Radius.

Wir wechseln die Baustelle von der Geometrie zur Energie:

$E_{pot} = m \bullet g \bullet h$ Potentielle Energie der Masse
$g = 9{,}81\ m/s^2$ Gravitations-Konstante

Mit der Physik betreten wir ein gefährliches Pflaster...

Zeit, 3D-Raum und Masse werden als gegeben vorausgesetzt, ohne die geringste Ahnung zu haben, was das überhaupt ist !!!
Masse gibt es nämlich gar nicht — wie Onkel Einstein uns noch zeigen wird. Odr?

Trotzdem funktioniert zunächst die Betrachtung in guter Näherung für's Makroskopische...

Potentielle Energie eines Objekts ist im etwa konstanten Gravitations-Feld der Erde umso höher, je höher die Masse des Objekts und es liegt... h = Höhe im Raum.

Folgt das Teilchen nun der Schwerkraft wird die potentielle Energie zunächst in kinetische Energie $E_{kin} = ½m \bullet v^2$ umgewandelt und im Falle des Zusammentreffens mit dem Erzeuger des Feldes in Wärme und Deformationen.
Kinetische Energie, also der Bewegung innewohnende Energie, wird also stark durch die Geschwindigkeit beschrieben — nämlich im Quadrat² von v.

Ergo ähnlich $f(x) = x^2$… als grafische Vorstellung.
Als Funktion: $E_{kin}(v) = ½m \bullet v^2$ und für den einfachen Fall m = const. = 2kg gilt also

$E_{kin}(v) = 1[kg] \bullet v^2[m^2/s^2]$

```
E(v)
 \     3 |       /
   \   2 |     /
 __ °•.||.•° __  __
               1    2    3    v   wie velocidad
```

Die Masse bewegt sich nun in Raum und Zeit und wir wissen immer noch nicht, wer diese drei überhaupt sind!

Die Masse kann man hier gern noch als konstant ansehen. Spätestens im Bereich von $E = m \bullet c^2$ funktioniert das nicht mehr, da hier die Lichtgeschwindigkeit am Werk ist. Diese ist für makroskopische Teilchen schwer zu erreichen und mikroskopische Elementar-Teilchen halten sich einfach nicht mehr an die gefundenen Regeln. Zum Glück!!!

Sonst würden wir ja in einer vollkommen bestimmbaren Roboter-Welt leben. Bei manchen Zeitgenossen kann man das beobachten...

Die auf der Erde üblicherweise vorhandene Reibung bleibt in dieser Betrachtung erstmal unberücksichtigt.

Ist kurz vor dem Einschlag E_{pot} fast vollständig in Bewegung, Geschwindigkeit, also E_{kin} umgewandelt, dann müsste ja gelten $E_{pot} = E_{kin}$.

Also nach Einsetzen der Definitionen auch:

$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Und mit folgenden Umformungen ergibt sich die Formel für die Geschwindigkeit.

$$
\begin{aligned}
m \cdot g \cdot h &= \tfrac{1}{2} m \cdot v^2 && | :m \\
g \cdot h &= \tfrac{1}{2} \cdot v^2 && | \cdot 2 \\
\underline{2g \cdot h} &= v^2 && | \sqrt[2]{} \\
\sqrt[2]{2g \cdot h} &= v
\end{aligned}
$$

Die erreichte Geschwindigkeit ergibt sich im Wesentlichen aus der anfänglichen Höhe und der Gravitation. Würde man die Reibung berücksichtigen, so würde das Teilchen durch diesen bremsenden Faktor in eine bestimmte, begrenzte Geschwindigkeit hineinwachsen.

Wie die Umwandlung in Wärme und Deformation abläuft ist schwieriger vorherzusehen...

Jetzt gibt's aber mal Druck! Mio Pa…

$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

R = 8,314 J / mol•K Gas-Konstante
n = Anzahl der Teilchen oder Moleküle
T = Temperatur
P = Druck
V = Volumen

Teilt man durch V, so erhält man

$$P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

Das in einem festen Volumen befindliche ideale Gas, steht mit steigender Menge an Molekülen und steigender Temperatur umso stärker unter Druck.

Das geht den Angestellten in manchem Unternehmen ähnlich…

Einstein...
Den Nobelpreis erhielt er für den photo-elektrischen Effekt.

Die spezielle Relativität bezeugt die Äquivalenz eines bewegten und eines statischen Beobachters oder Inertialsystems...

Die allgemeine Relativität bestätigt dies für alle denkbaren Bezugs-Systeme einer Betrachtung...

Man könnte nun darin sehen, dass es so etwas wie absoluten Raum nicht gibt. Sehr wahrscheinlich ist dann auch eine absolute Zeit unwahrscheinlich😜

Alles nur eine Illusion im Nichts?
Zumindest scheinen Raum und Zeit miteinander verschränkt als Raumzeit...
Oder Zeitraum?

Nur eine Frage der Sichtweise...
Schließlich definieren wir Raum und Zeit ja nur über darin befindliche Masse-Teilchen, indem wir ihnen zu einem Zeitpunkt einen Ort-Punkt zuordnen. Masse ist allerdings etwas sehr Flüchtiges. Odr? zumindest nicht das, was wir aus dem konditionierten Verstand heraus gerne hätten.

Da wir uns selbst ja gern auf eine (denkende) Masse im Raum reduzieren, stellt sich die Frage: Wer sind Sie eigentlich?
Antwort: Vielleicht ein sich selbst immer wieder neu erschaffendes Bewusstsein...
"Ich bin in dieser Welt, aber nicht von dieser Welt.."

Da die Raumzeit sich offenbar nicht sinnvoll auf eine euklidische, lineare Form reduzieren lässt, begibt man sich zu einer allgemeinere Form der Darstellung, die aber auch wieder nur ein Modell, ein schwaches Abbild der Realität sein kann.
"Don't eat the menu."

Wenn der Raum nicht-linear ist, dann ist der Abstand zwischen zwei Punkten darin im allgemeinen auch nicht linear sondern beliebig verschnörkelt...

Also kann man sich den Raum eher als eine Berg- und Tal-Landschaft vorstellen.
Zudem kommen 'Eigenschaften' des Raums hinzu. Aber vielleicht sind die Eigenschaften selbst ja die Verschnörkelungen, weil Qualität und Quantität auch verschränkt sind ?!

Die geometrische Theorie...
...von Einstein besagt:
Eine gegebene Materieanordnung "verzerrt" die Geometrie der Raumzeit. Die Geometrie der Raumzeit bestimmt, wie sich die Materie weiterbewegt.

Um das mathematisch zu erfassen, müsste man rechnen wie Einstein…
Begnügen wir uns besser mit der Anschauung und betrachten eine weitere Implikation aus Einsteins Überlegungen:

$E = m \bullet c^2$

oder umgeformt:

$m = E \div c^2$

oder noch anders geschrieben:

$$m = \frac{E}{c^2}$$

mit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s konst. Lichtgeschwindigkeit.

So gesehen ist Materie eine Form der Energie. Und zwar nur die Spitze des Eisbergs! Man teilt ja schließlich E durch etwas seeeehr Großes. Was ist also das Wesentliche in der Schöpfung?

Fragen über Fragen…

Manchmal scheint es sogar so, als wäre Materie ‘nur’ eine Wechsel-Wirkung von Energien.
Und die Suche nach den kleinsten Teilchen als Urgrund der sichtbaren Welt findet auch kein Ende. Das Atom war’s schonmal nicht…

Einstein äußerte wohl mal den Gedanken, dass Materie eventuell nur eine Illusion sein könnte, wenn auch eine sehr hartnäckige.

Eine sehr hartnäckige Illusion ist zum Beispiel die Schwerkraft oder Gravitation, die wir ja im Alltag in der Regel als positiv erleben dürfen. Unabhängig von der Betrachtung als Kraft oder Verzerrung im Raum, lässt sich <u>eine</u> mögliche Form der Bewegung darin zumindest makroskopisch -wie aus etlichen Experimenten folgt- so beschreiben:

$f(t) = ½ \cdot g \cdot t^2$ freier Fall im gekrümmten Raum
$f(t) = g/2 \cdot t^2$ hier sind nur die Konstanten zusammen-gefasst
$f'(t) = g \cdot t$ entsprechende Geschwindigkeit

g kennen wir schon: Es ist die Beschleunigung im Feld der Erde und beträgt je nach Standort ungefähr 9,81 m/s^2. D.h. die Geschwindigkeit nimmt um 9,81 m/s pro Sekunde zu.

f’(t) ist die ‘Ableitung’ von f(t) und beschreibt die Entwicklung der Steigung der Ausgangs-Funktion. Die Veränderung des Ortes einer Masse wird beispielsweise beschrieben durch die Geschwindigkeit.
Gesprochen wird es: f - Strich - von - t.

Im einfachsten Fall von konstanter Geschwindigkeit kann diese auch durch $v = s / t$ beschrieben werden, also Weg pro Zeit. Genauer und allgemeiner wäre $v = \Delta s / \Delta t$ als Formel, also Weg-Differenz geteilt durch Zeit-Differenz. Oder infinitesimal in möglichst kleinen Schritten für mehr Genauigkeit

$v = ds / dt$. Auch $v = d/dt\ s$ geschrieben.

Auch Wellen haben eine “Geschwindigkeit”, deshalb nun der ‘Sinus’ als weitere Funktion zur Beschreibung von Vorgängen und Zusammenhängen:

f(o‹) = sin o‹

o‹ ist ein Winkel, genannt alpha, z.B. der Winkel zwischen den Schenkeln…
…also den Schenkeln eines rechtwinkligen Dreiecks beispielsweise:

```
      • ← - - - - - - 90°
a   •           •
  •       •       •       •← - - - - - - o‹
             c
```

Von dieser Art Dreieck sind sehr viele denkbar.

Sinus ist definiert als das Verhältnis von Gegenkathete a zu Hypotenuse c. Hypotenuse ist die Längste der Seiten im Dreieck, Gegenkathete ist die Kürzere der Übrigen. Man kann das so aufschreiben:

sin o‹ = a / c

Jedem Winkel entspricht ein bestimmtes Seitenverhältnis.

Im Extremfall o‹ = 0° verschwindet a, also sin o‹ = 0.

Wird hingegen o‹ immer größer, ist irgendwann der Punkt erreicht, wo die Gegenkathete a zur An(deren)kathete wird…bei ungefähr 45°. Eine seltsame Verwandlung…

Bei ca. 90° klappt der Schenkel auf die Hypotenuse und wird eins damit, hat also die gleiche Länge, somit ist hier o‹ = 1, weil ja c & a den gleichen Wert haben und a / c dann EINS ergibt.

Grafisch in etwa so:

```
 f(o‹)  1
        |       •
        |   /       \
__ __ |/__ __ __\__ __ __ __
        |  45    90   180\             /    o‹
        |                     \       /
        |                         •
      -1
```

In der anderen Richtung nach -1 auf der vertikalen Achse funktioniert das auch, wie man sieht!

Nun kann alpha ja auch zeitabhängig sein: o‹(t) = w • t mit w = o‹ / t. Und damit gilt auch mit omega w als Frequenz

f(t) = sin w • t

Es ist eine periodische Schwingung und kann zur Beschreibung von z.B. schwingenden Saiten eines Instrumentes eingesetzt werden.

```
    f(t)  1
          |       •
          |   /      \
__ __ |/__ __ __\__ __ __ /__
         /|   1    2    3 \          /   t [s]
     /    |                  \      /
          |                    •
         -1
```

Hier ist die Frequenz w = ⅙ sec^{-1}. Die Zeit für **einen** Schwingungs-Durchlauf ist ja ca. 6 Sekunden in der Abbildung. w = Anzahl / Zeit. Einheit 1/sec oder sec^{-1}.

Kommen wir zu den wirklich wichtigen Dingen im Leben:
“Wenn man das 2:0 kassiert, ist ein 1:1 nicht mehr möglich.” ~ Satz des Pythagoras

Falsch zugeordnete Zitate á la Känguru!!
Nur weil wir gerade schon bei Dreiecken sind…

Der Satz des Pythagoras lautet in Echt natürlich viel einfacher

$a^2 + b^2 = c^2$ Odr?

a, b und c sind wie schon gehabt die Seiten eines rechtwinkligen Drei-Ecks.
c ist dabei gebräuchlicher weise die Hypotenuse.

Das bedeutet…

Wenn man bei einem Dry-Eck über den Seiten einfach mal aus Lust und Laune Quadrate hinmalte…

Also Seiten mit der gleichen Länge wie a, b und c vom Drei-Eck jeweils.

So wie hier angedeutet:

```
                x

                            x
   x
          •       b
 x   a   •       •
        •    •    •    •
        |      c       Das kann man
        |              sich dann ja auch
        |              selber weiter
        |              ausmalen…
       x ——————— x
```

…dann fällt es einem wie Schuppen von den Augen, dass ja die Summe der Flächen der kleineren Quadrate gleich der Fläche des größeren Quadrates ist.

Und schon gilt:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

c lässt sich aus der Kenntnis der anderen Seiten a und b bestimmen.

Wiederum der Vollständigkeit zuliebe sei eine weitere interessante Funktion nur genannt:

$f(n) = e^n + b$
e = 2,7182..... Euler'sche Zahl

z.B. bei Wachstums-Prozessen in der Natur, etwa bei Pilzen.

Und last but not least: tadaaa

d/dt A = o‹•A - ß•A^3

der anharmonische Ossillator😆…
…zur Beschreibung von Chaos und Selbstorganisation:

Jetzt wird‘s sogar ein bisschen wissenschaftlich - und romantisch…

Abb.1: Wolkenstraßen als Folge hochgeordneter Luftbewegungen.

Überall im irdischen Dasein trifft man auf Strukturen. In der ‘unbelebten‘ Natur weisen zum Beispiel sogenannte Wolkenstraßen (Abb.1) hochgeordnete Strukturen auf. Aber auch in der *belebten* Natur kann man beispielsweise im Aufbau eines Blattes mit seinen feinen Verästelungen eine hochgradige Ordnung feststellen. Schließlich sei noch der Städtebau als Repräsentant künstlicher Strukturen genannt.

Die Frage nach dem Entstehen solcher geordneter Zustände führt uns zur Synergetik, der Lehre vom "Zusammenwirken". Diese beschäftigt sich mit dem Zusammenwirken vieler Teile, den Untereinheiten, eines System, insbesondere mit der daraus resultierenden Strukturbildung. Untereinheiten können sein: Atome, Moleküle, Zellen, Neuronen, Organe, Tier- und Menschengruppen etc.

Das Verhalten solcher Systeme unterliegt bestimmten Gesetzmäßigkeiten, die durch folgende Konzepte erfasst werden können:

- Kontrollparameter,
- Instabilität,
- Ordnungsparameter,
- Versklavungsprinzip,
- Nichtlineare Dynamik.

Um diese Konzepte zu verstehen, betrachten wir ein Experiment, das um 1900 von dem französischen Physiker Henri Bénard durchgeführt wurde.

Das Bénard-Experiment als Beispiel für Strukturbildung

Aufbau des Systems

Es handelt sich bei diesem Experiment um eine von unten erhitzte Flüssigkeit. Im Modell stellt man sich eine Flüssigkeitsschicht der Dicke d vor, die gleichmäßig über die gesamte untere Fläche eine Wärmezufuhr erfährt (Abb.2).

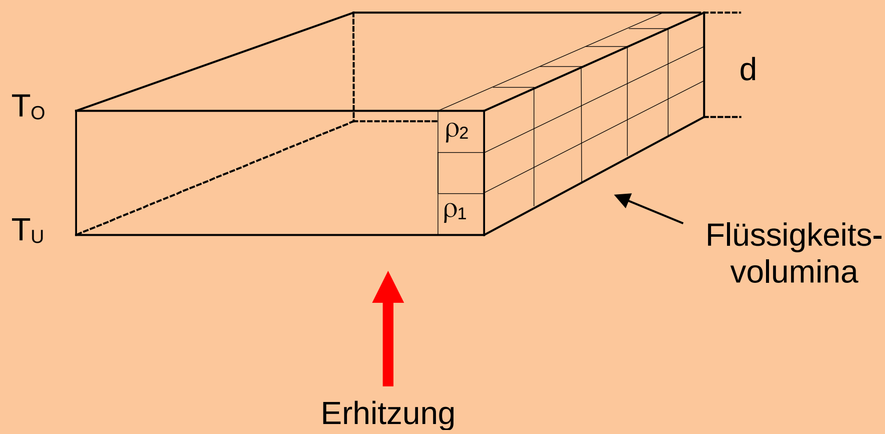


Abb.2: Das Bénard-Experiment im Modell.

Störung des Systems durch den Kontrollparameter

In der unteren Flüssigkeitsschicht bildet sich eine höhere Temperatur aus als in der oberen, sodaß zwischen diesen Schichten eine Temperaturdifferenz

$$\Delta T = T_U - T_O$$

besteht, die durch die Wärmezufuhr von außen kontrolliert werden kann. ΔT nennt man daher Kontrollparameter des Systems. Er ist ein Maß dafür, wie weit man das System aus dem Gleichgewichtszustand bringt.

Im vorliegenden Fall stellt sich die Störung des Systems folgendermaßen dar:
Da eine Erhitzung in der Regel eine Abnahme der Dichte mit sich bringt, ist also auf Grund der Temperaturdifferenz ΔT die Dichte am Boden der Flüssigkeit geringer als in der oberen Schicht. Betrachtet man nun die Untereinheiten des Systems, die man sich hier als Flüssigkeitsvolumina vorstellen kann, so treffen wir auf die Situation, daß die leichteren Teile unten liegen, während sich die schwereren oben befinden. Die ursprünglich homogene Flüssigkeit hat eine Störung erfahren.

Verhalten des Systems vor der Instabilität

In der oben beschriebenen Situation wirken folgende Kräfte effektiv:

- mehr Auftrieb auf leichtere Teile,
- mehr Schwerkraft auf schwerere Teile.

Es müsste also ein Austausch der Flüssigkeitsvolumina stattfinden, d.h. die Flüssigkeit müsste sich in Bewegung setzen. Dies tut sie jedoch zunächst nicht, da den einwirkenden Kräften die innere Reibung (Viskosität) entgegensteht. Bei entsprechend kleinem Δ T bleibt die Flüssigkeit in Ruhe. Der Temperaturtransport erfolgt hier auf molekularer Ebene. Das System kehrt in seinen homogenen Referenzzustand zurück, dieser Zustand hat demnach eine Stabilität.

Verhalten des Systems nach der Instabilität

Erhöht man Δ T über einen kritischen Wert, bei dem die beschriebenen Kräfte die Viskosität übersteigen, so gerät die Flüssigkeit in Bewegung. Der homogene Zustand ist beim kritischen Δ T-Wert instabil geworden. Verblüffenderweise beobachtet man nun, daß das System in einen anderen geordneten Zustand übergeht, der wiederum stabil ist: Es ergibt sich ein geordnetes Strömungsmuster in Form von Flüssigkeitsrollen (Abb.3). Man spricht von einer Rollenbewegung.

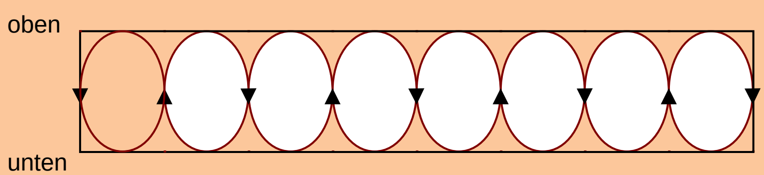


Abb.3: Rollenbewegung als hochgeordnetes Strömungsmuster.

Erklärung der Strukturbildung

Beschreibung des Systems

Zum Zwecke der mathematischen Beschreibung betrachten wir den Verlauf der vertikalen Geschwindigkeit der Flüssigkeit über deren Breite. Die x-Achse wird mit der Breite, die y-Achse mit der Geschwindigkeit identifiziert (Abb.4).

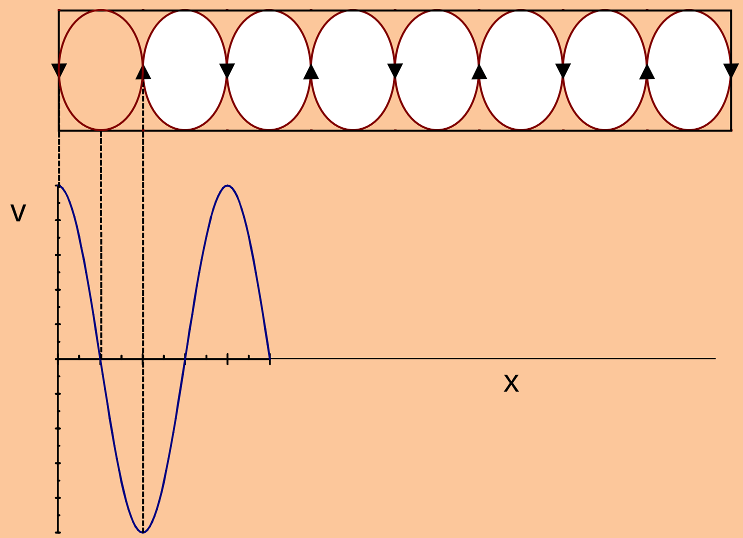


Abb.4: Übertragung der Rollenbewegung in ein Koordinatensystem.

Demnach kann man das System mit einer Sinus-Funktion

$$v_z(x) = A_1 \sin k_1 (x+\varphi)$$

beschreiben. A_1 ist die der Schwingung zugehörige Amplitude, $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ ihre Wellenzahl (λ_1 = Wellenlänge), $\varphi = \pi/2$ ihre Phase. Derartige Funktionen sind theoretisch unendlich viele denkbar:

$$v_z(x) = A_n \sin k_n (x+\varphi).$$

Die Suche nach einer Erklärung für die Strukturbildung führt uns also zu den Fragen, warum und wie geht das System ausgerechnet in diesen Zustand über.

Der Ordnungsparameter

Solange das System das Muster noch nicht gebildet hat, kann man es natürlich auch nicht mit der oben genannten Sinus-Funktion beschreiben. Wir können jedoch die kleinen Flüssigkeitsbewegungen (Fluktuationen), die sich zunächst ergeben als Amplitudenansätze jeweils möglicher Schwingungen ansehen.

In diesem Modell "testet" die Flüssigkeit durch Fluktuationen verschiedene Bewegungszustände aus. Die meisten Amplituden klingen wieder ab, wohingegen sich eine bestimmte durchzusetzen vermag. Man nennt diese spezielle Amplitude A_1 den Ordnungsparameter des Systems.

Zum besseren Verständnis schauen wir uns die zeitliche Entwicklung des

Ordnungsparameters A_1 an. Dieser Ablauf läßt sich mit der Gleichung des aus der Physik bekannten "anharmonischen Oszillator" beschreiben:

$$d/dt\ A_1 = \alpha A_1 - \beta A_1^3. \qquad *$$

αA_1 stellt die Zuwachsrate mit dem Wachstumsparameter α dar.
βA_1^3 ist eine Verlustrate mit dem Verlustparameter β.
α und β sind vom System vorgegebene Größen.

Zunächst ist A_1 in Form einer Fluktuation nur ansatzweise als Amplitude vorhanden. Für dieses kleine A_1 kann man das kubische Glied in der Gleichung vernachlässigen, sodaß die Änderung von A_1 positiv ist. A_1 wächst demnach weiter an. Dadurch steigt natürlich der Einfluß der Verlustrate βA_1^3 und zwar bis zur Kompensation der Zuwachsrate. Da die Änderung von A_1 nun Null ist, nimmt A_1 also einen konstanten Wert an (Abb.5).

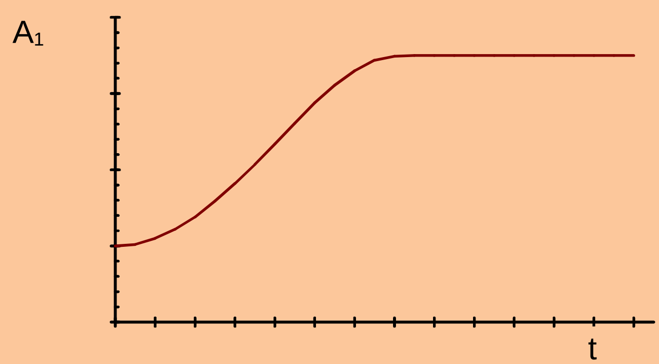


Abb.5: Zeitlicher Verlauf der Amplitude A_1.

Mit $d/dt\ A_1 = 0$ ergibt sich für die Gleichung *

$$0 = \alpha A_1 - \beta A_1^3.$$

Als Lösungen dieses Ausdruckes findet man nach einfachen Umformungen:

$$A_1 = 0$$

$$A_1 = \pm\sqrt{\alpha / \beta}\ .$$

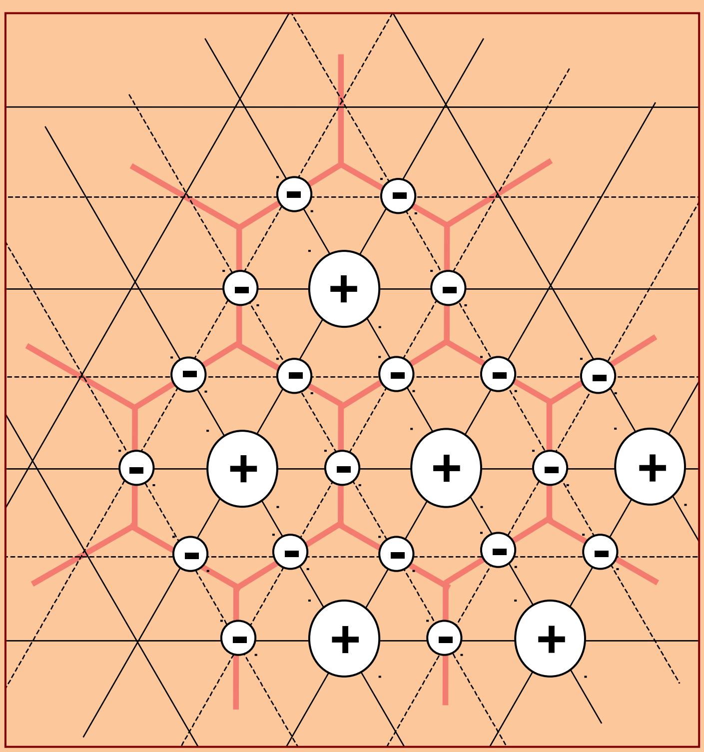
Ersterer ist der uninteressante Fall, daß A_1 noch nicht entstanden ist. $\pm\sqrt{\alpha / \beta}$ stellt die vom System vorgegebenen Bedingungen dar (z.B. $\alpha \sim \Delta T \sim d$). Die Amplitude A_1 erfüllt diese Bedingungen und wird dadurch in ihrer Entwicklung begünstigt.Genau betrachtet gibt es zwei Lösungen, die gleichberechtigt sind, wie wir später noch sehen werden.

Das Versklavungsprinzip

Die so entstandene Amplitude zwingt nun anderen Flüssigkeitselementen diesen Bewegungszustand auf, sie werden "versklavt". Macht man den Prozess durch das Einbringen von Tinte sichtbar, so kann man deutlich erkennen, wie mit der Zeit immer mehr Flüssigkeitselemente an der Bewegung teilnehmen. Betrachtet man diese Versklavung als einen Zuwachs des Ordnungsparameters, wodurch wiederum *vermehrt* Flüssigkeitsanteile versklavt werden, dann muß schließlich die gesamte Flüssigkeit dem Ordnungsparameter A_1 folgen und geht damit in einen stabilen Zustand über. Von außen beobachten wir somit das bereits erwähnte Rollenmuster.

Das Wabenmuster

In der Praxis treten in der Regel keine isolierten Rollenmuster auf, sondern es entstehen Wabenmuster, die man sich als Überlagerung dreier, jeweils um 60° versetzter Rollenbewegungen vorstellen kann (Abb.6).



Plus -aufsteigende Flüssigkeit
Minus -absteigende Flüssigkeit

Abb.6: Schematische Darstellung des Wabenmusters.

Das unten gezeigte Wabenmuster (Abb.7) ist selbst gegen massive Störungen wie Umrühren stabil. Interessanterweise ist der gefundene Zustand derjenige, der die Wärme am besten nach oben transportiert.

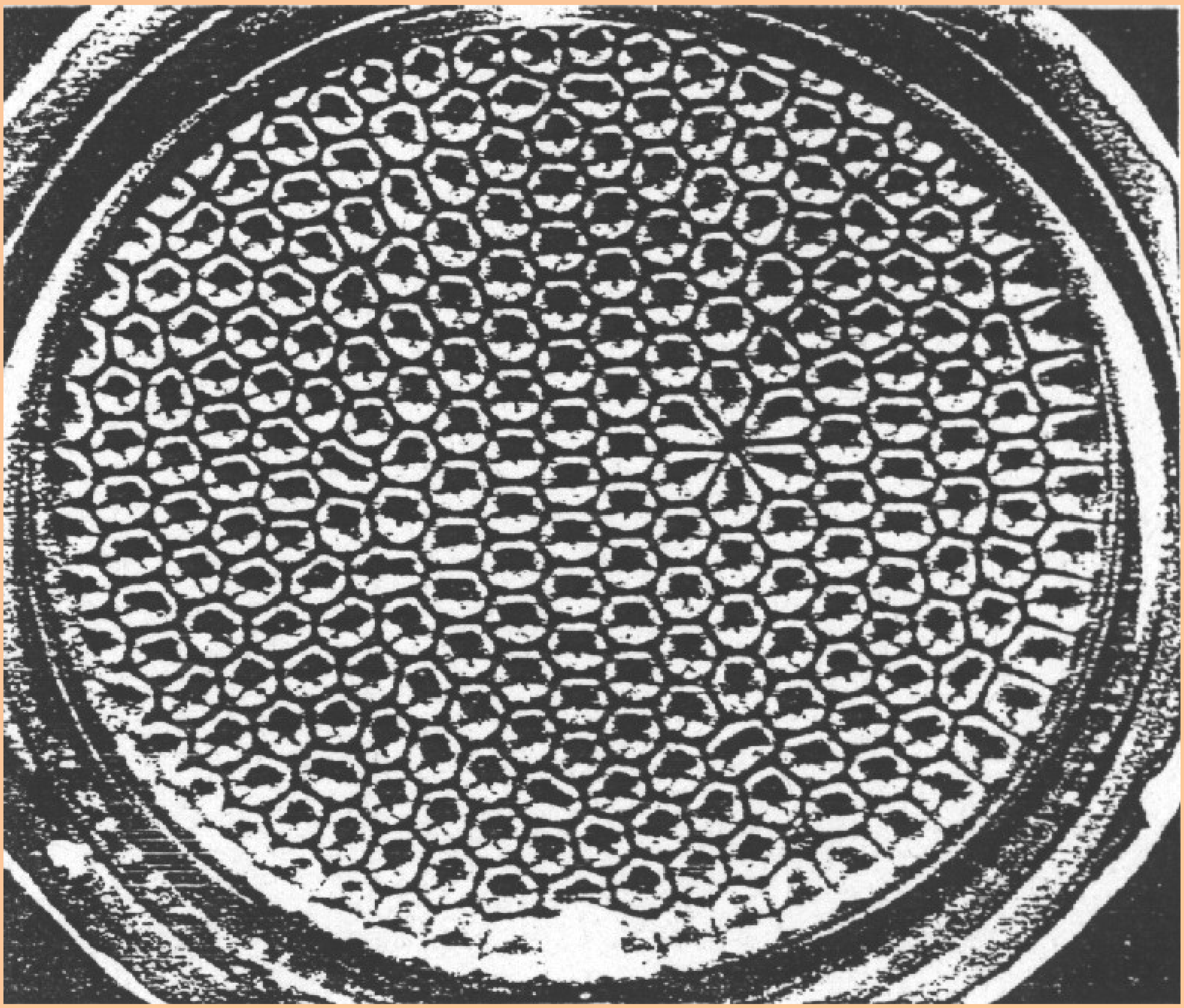


Abb.7: Das Wabenmuster im Experiment.

Entstehen von Chaos

Kausalitätsprinzipien

Wir haben gesehen, wie durch Fluktuationen ein Muster entstehen kann. Verallgemeinert bedeutet dies, daß eine kleine, mikroskopische Ursache eine makroskopische Wirkung erzielt. Mit Phänomenen, die diesem Kausalitätsprinzip folgen, befasst sich die Nichtlineare Dynamik, deren Bedeutung klar wird, wenn wir uns die bisher in der Physik üblichen Kausalitätsprinzipien anschauen.

Die klassische Anschauung ist das als schwache Kausalität bekannte Prinzip. Es besagt, daß gleiche Ursachen gleiche Wirkungen hervorrufen. Die Erfahrung hat jedoch die Unmöglichkeit aufgezeigt, gleiche Ursachen experimentell zu reproduzieren. Daher wurde das Prinzip umformuliert: „Ähnliche Ursachen erzeugen ähnliche Wirkungen". Dieses neue Kausalitätsprinzip beinhaltet das der schwachen Kausalität und wird daher als starke Kausalität bezeichnet.

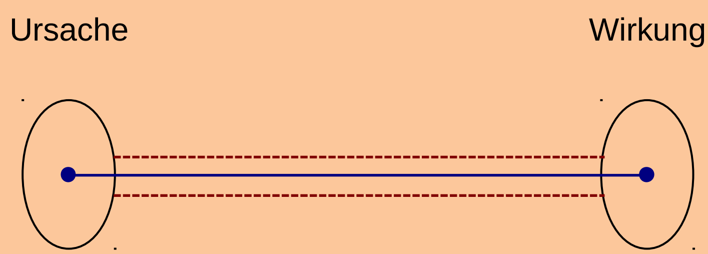


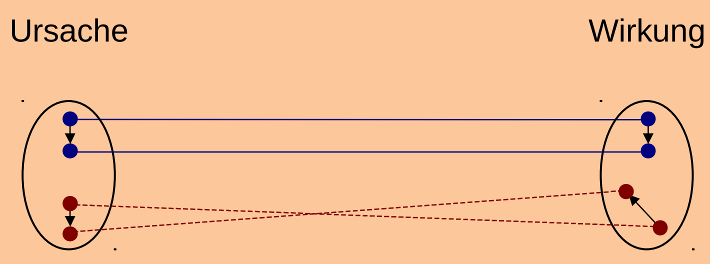
Abb.8: Schematische Darstellung von starker und schwacher Kausalität.

Die damit verbundene Vorstellung ist die der Berechenbarkeit aller im Universum ablaufenden Vorgänge. Unvorhersehbares ist demnach nur durch Mangel an Information bzw. Unzulänglichkeiten bei deren Verarbeitung möglich. Mit anderen Worten: Es gibt kein Chaos!

Im Gegensatz dazu ist in der Nichtlinearen Dynamik, deren Name auf die zur Beschreibung benutzten Gleichungssysteme weist, neben der bereits beobachteten Selbstorganisation auch Chaos möglich.

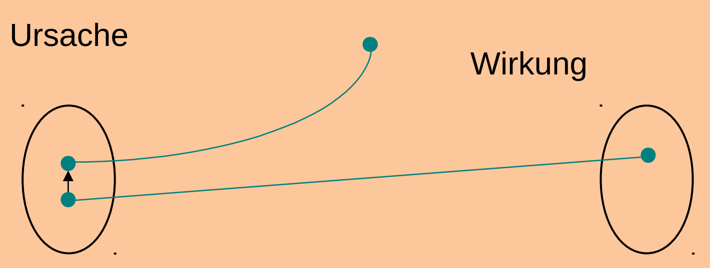
Die Unbrauchbarkeit der Prinzipien der schwachen und starken Kausalität zur Beschreibung nichtlinearer Prozesse führte zur Formulierung des eingangs genannten

Kausalitätsprinzips der kleinen Ursache mit großer Wirkung, dem sogenannten "Schmetterlingseffekt". Der Meteorologe Lorenz prägte diesen Namen durch seinen Ausspruch: „Der Flügelschlag eines Schmetterlings in Peking kann das Wetter an der Westküste der USA beeinflussen".



Bei der schwachen Kausalität bewirkt eine Änderung der Ursache eine ebensolche Änderung der Wirkung.

Bei der starken Kausalität bewirkt eine Änderung der Ursache in der Regel nicht die gleiche Änderung der Wirkung.



Beim Schmetterlingseffekt kann eine kleine Änderung der Ursache ganz extreme Änderungen der Wirkung hervorrufen.

Abb.9: Kausalitätsprinzipien.

Betrachten wir den Schmetterlingseffekt als Gesetzmäßigkeit der Synergetik, so stellt sich uns die Frage, wie neben der Entstehung von Strukturen durch Selbstorganisation sich auch chaotische Zustände herausbilden können.

Logistische Gleichung: Selbstorganisation & Chaos

Um das Entstehen von Chaos zu verstehen, beschäftigen wir uns mit der logistischen Gleichung:

$$p_{n+1} = p_n + k\, p_n\, (1 - p_n).$$

Multipliziert man diese Gleichung aus, erhalten wir einen ähnlichen Ausdruck wie beim anharmonischen Oszillator:

$$p_{n+1} = p_n + k\, p_n - k\, p_n^2.$$

Wir betrachten die logistische Gleichung als Beschreibung der Populationsentwicklung eines Beutetieres. p_n sei hierbei die Population im 1.Jahr, p_{n+1} diejenige des darauffolgenden Jahres etc. $k\, p_n$ stellt die Zuwachsrate, $k\, p_n^2$ die Verlustrate dar. k ist eine Koppelungskonstante, in diesem Fall die Fortpflanzung der Beutetiere.

Gehen wir zunächst von einer geringen Population der Beutetiere aus, so bedeutet dies für die "Räuber", die sich von den Beutetieren ernähren, ein geringes Nahrungs-Angebot. Auf Grund dieser ungünstigen Bedingung geht der Bestand der Räuber zurück. Für die Beutetiere bewirkt das eine geringe Verlustrate, d.h. die Population wächst. Das somit verbesserte Nahrungsangebot der Räuber erhöht wiederum deren Bestand, sodaß die Verluste bei den Beutetieren größer werden. Die Population wächst nun also langsamer, bis der Verlust den Zuwachs kompensiert und somit die Anzahl der Beutetiere konstant bleibt. Bei Zahlenbeispielen ist zu beachten, daß man relative Zahlen benutzen muß, d.h. man identifiziert den Stabilitätszustand mit 100% = 1.

Das Verhalten derartiger Systeme ist nun aber in hohem Maße von der Koppelungskonstanten k abhängig (Abb.10).

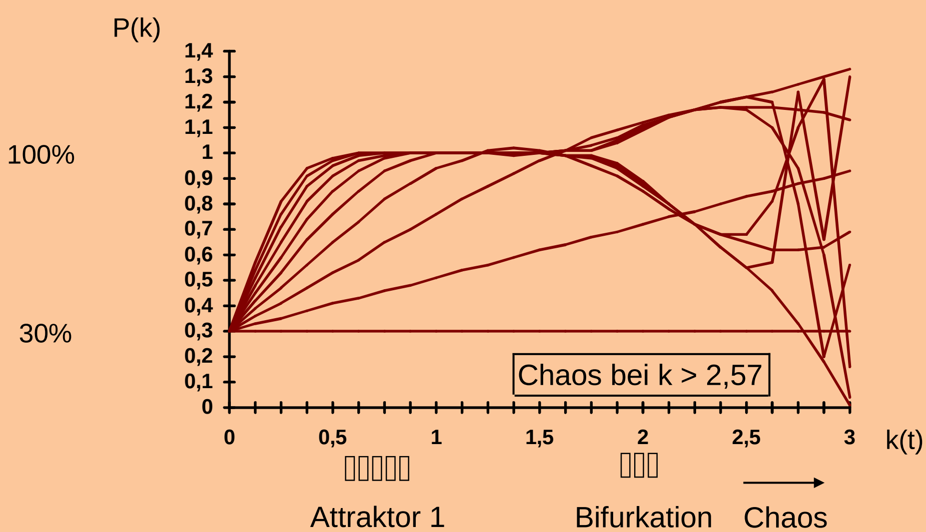


Abb.10: Verhalten des Systems in Abhängigkeit von k.

In der obigen Graphik ist die Population p gegen die Koppelungskonstante k, die in der Regel noch von der Zeit abhängt, aufgetragen. Die einzelnen Linien zeigen, um dem Rekursionscharakter Rechnung zu tragen, den Verlauf für verschiedene Anfangswerte.

Die sich daraus ergebende Gesamtkurve stellt in ihrer anfänglichen Gestalt das bereits beschriebene Erreichen und Beibehalten des Stabilitätszustandes dar. Die Zustände, zu denen ein System tendiert nennt man "Attraktoren".

Bei weiterer Erhöhung von k beobachtet man dann sogenannte "Bifurkationen" (Verzweigungen), d.h. das System kann jeweils zwischen zwei gleichberechtigten Zuständen wählen. Schließlich ergibt sich ab einem bestimmten Wert für k nur noch eine Punktwolke.

Nachdem also zunächst das System eindeutig durch den Stabilitätszustand bestimmt ist, wird dann durch die Bifurkationen die Vorhersagbarkeit schon eingeschränkt. Am Ende sind in der Punktwolke zwar die einzelnen Punkte eindeutig bestimmt, eine Vorhersage ist jedoch nicht mehr möglich:
Es herrscht Chaos.

<u>Selbstorganisation & Chaos beim Bénard-Experiment</u>

Zum besseren Verständnis schauen wir uns die Bifurkationen und das Verhalten in diesem Bereich beim Bénard-Experiment an.

Wir hatten als Stabilitätsbedingungen für die Amplitude A_1 drei Lösungen herausgefunden. Im Fall $A_1 = 0$ hat sich der Ordnungsparameter noch nicht gebildet. Für Amplituden A_n , die nicht Ordnungsparameter sind und demnach wieder abklingen, muß zur Realisation von $A_n = 0$ gelten

$$d/dt\, A_n < 0$$

Daraus folgt, daß der Wachstumsfaktor α in Gleichung $\star$ negativ ist. Das System gibt also für nicht geeignete Amplituden einen negativen Wachstumsfaktor vor und nimmt auf diese Art und Weise eine Selektion vor. Für $A_1 \neq 0$ begünstigt das System die Entwicklung mit einem positiven Wachtumsparameter und in diesem Fall gibt es zwei vollkommen gleichberechtigte Lösungen:

$$A_1 = +\sqrt{\alpha / \beta}$$

$$\tilde{A}_1 = -\sqrt{\alpha / \beta}$$

Diese beiden für das System möglichen Stabilitätszustände stellen eine Bifurkation dar (Abb.11).

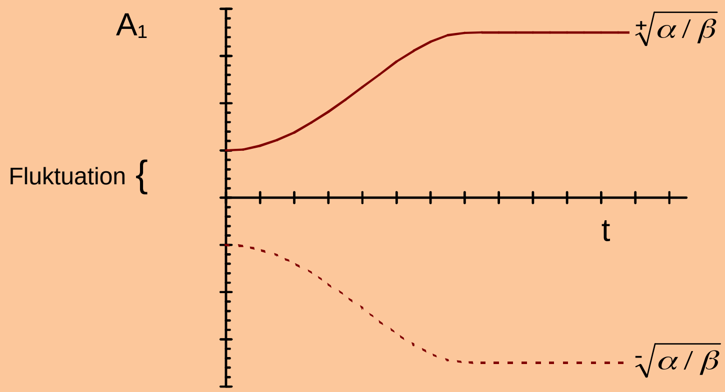


Abb.11: Bifurkation beim Bénard-Experiment.

Zur Klärung der Frage, welcher Zustand letztlich ausgebildet wird, betrachten wir das System im Potentialmuldenmodell. Für den Fall $A_n = 0$ stellt sich dies folgendermaßen dar (Abb.12):

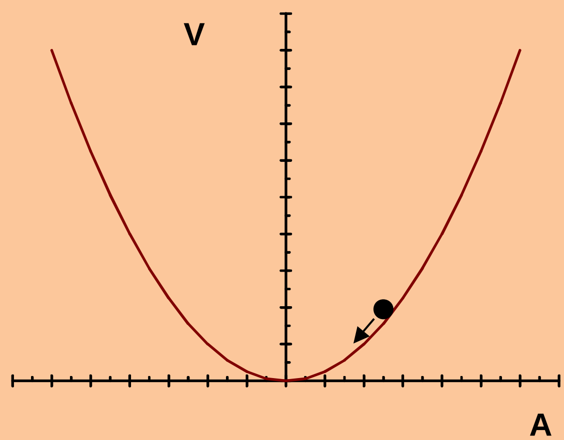


Abb.12: Potentiallandschaft für $A_n = 0$.

Die Amplitude ist hier auf der x-Achse, das Potential auf der y-Achse aufgetragen. Die Position der Kugel symbolisiert den Zustand des Systems. Bei einer entsprechenden Auslenkung rollt die Kugel immer wieder in die Mulde zurück, das System strebt wieder dem Ausgangszustand zu.

Im Fall $A_1 \neq 0$ ergibt sich folgendes Potentialmuldenmodell (Abb.13):

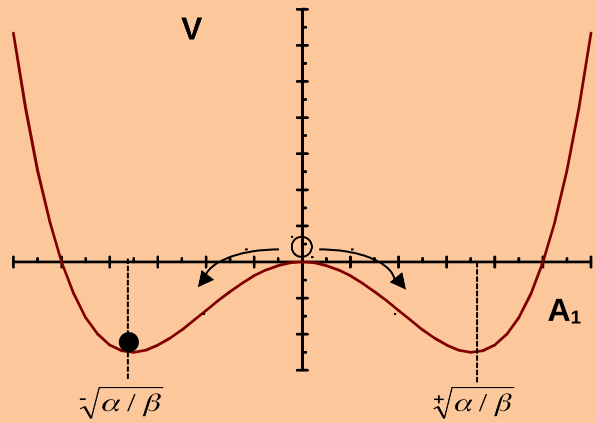


Abb.13: Potentiallandschaft für $A_1 \neq 0$.

Die Kugel hat nun zwei Möglichkeiten (Attraktoren) und eine beliebig kleine Auslenkung ihres Schwerpunktes aus der Mittellage zur einen oder anderen Seite bewirkt das Hinabrollen in die jeweilige Mulde. Im Experiment bedeutet dies, daß ein kleiner Vorsprung der einen Amplitude vor der anderen zur Ausbildung des entsprechendenden Ordnungsparameters führt.
Die beiden Möglichkeiten sind (Abb.14):

Abb.14: Zwei gleichberechtigte Möglichkeiten des Strömungsmusters.

Diese beiden Attraktoren stellen eine Bifurkation im Verhalten des Systems dar, die auf Grund des hier wirksamen Schmetterlingseffekts mit einer Einschränkung der Vorhersagbarkeit einhergeht. Mit dieser Einschränkung kommen wir dem Chaos näher und jede weitere Verzweigung, wie wir bei der logistischen Gleichung gesehen haben, geleitet uns in die Unbestimmtheit.

Bezug zum Sport

Um den theoretischen Gebilden nun Leben einzuhauchen, sehen wir uns deren Wirkungsweise an zwei Beispielen an.

Zunächst das Chaos: Ein Fußballspieler, der als sicherer Elfmeterschütze gilt, wird zunächst seinem Ruf gerecht, schießt dann aber in der entscheidenden Situation doch vorbei. Bei der Klärung dessen hilft uns der Schmetterlingseffekt. Eine kleine Änderung in den Anfangsbedingungen der Bewegung kann dazu führen, daß die komplette Bewegung mißlingt. Das Ergebnis ist das Ausbleiben der erhofften Leistung.

Als Beispiel einer Strukturbildung sei hier der Trab eines Pferdes genannt. Man kann heutzutage davon ausgehen, daß solche Bewegungsmuster durch Selbstorganisation entstehen und diese als Arbeitsweise des Nervensystems betrachten. Besondere Bedeutung hat die Selbstorganisation damit natürlich für das motorische Lernen...

Konkrete Anwendung:

Im nun dargestellten Versuch von BLASER e.a. werden die beobachtbaren zyklischen Bewegungen (Bewegungsmuster) einer Schwimmerin als Ausdruck zentralnervös-energetischer Selbstorganisation gedeutet und mit dem Instrumentarium der dynamischen Systemtheorien beschrieben.

Grundlage der Betrachtung ist das Zentralnervensystem als dissipatives System, dessen Eigendynamik (Erregung und Hemmung) durch die Bahnung in Grenzen gehalten wird. Diese Bahnung von Bewegungsmustern kann man sich als neuronale Verschaltungen vorstellen, die bei gleichbleibender Informationskonfiguration durch Übung entstehen.

Eine derartige geordnete Struktur ermöglicht das zeitlich-räumlich-funktionelle Zusammenwirken mit den ebenfalls strukturierten, energetischen Abläufen der Muskulatur. In diesem Zustand wird eine äußere Belastung durch eine entsprechende Leistungsabgabe kompensiert. Das "System" Organismus befindet sich also in einem stabilen Ordnungszustand.
Wird nun die Belastung gesteigert, kann das derzeitige psychophysische Funktionsniveau im Sinne des durch Feedback-Informationen ermöglichten Fließgleichgewichts zunächst noch aufrecht erhalten werden.

Bei einer weiteren Erhöhung der Belastung kommt es jedoch schließlich durch irreversible Prozesse im Zuge der anabolen Adaption zum Umbruch (Instabilität). Diese Umbruchsituation stellt sich im Nervensystem als Phasenübergang bezüglich veränderter dissipativer Strukturbildung dar. Mögliche Folgen des Umbruchs sind Leistungssteigerung, Leistungslimitierung bzw. Leistungsabbruch.

Im Experiment wurde u.a. eine ansteigende Belastung für die Schwimmerin durch die regulierbare Anströmgeschwindigkeit (Kontrollparameter) im Strömungskanal realisiert.

Aus Tabelle 7 sind die genauen Parameter abzulesen.

	n = 11 Test: "Stufenförmig ansteigende Belastung"
Belastungsstärke von...........bis	0,5 m/s - 1,0 m/s
Belastungsdauer pro Test	30 s
Anzahl der Zyklen insgesamt	119

Tab.7: Stufenförmig ansteigende Belastungsstruktur beim Brustschwimmen im Strömungskanal.

Bei der Auswertung der zweidimensionalen Videoaufnahmen mit Hilfe eines Technikmodells wurde die koordinativ-energetische Beanspruchung des jeweiligen Zustandes durch die Auswahl der drei Größen Zyklusweg, Zyklusfrequenz und Zyklusgeschwindigkeit berücksichtigt.

Dabei ist zu bemerken, daß durch den für zyklische Bewegungen typischen, funktionalen Zusammenhang des Zyklusweges und der Zyklusfrequenz als Produkt der Zyklusgeschwindigkeit die koordinativ-energetischen Wechselbeziehungen gut abzubilden sind: Die Gestaltung des Zyklusweges hängt in erster Linie von energetischen Potentialen ab, während die Erzeugung der Bewegungsfrequenz vor allem nerval-koordinativ bedingt ist.

Die Darstellung der zeitlichen Entwicklung der Bewegungszustände der Athletin kann in diesem Sinne durch Identifikation des Zyklusweges s, der Zyklusfrequenz f und der Zyklusgeschwindigkeit v mit den Achsen eines dreidimensionalen Koordinatensystems erfolgen. In einem derartigen "Zustandsraum" lassen sich die Zustände Chaos und Ordnung des Sytems und somit die Attraktoren beobachten. Als Attraktoren sind hier die zur Erreichung des Bewegungsziels eingesetzten Techniken anzusehen.

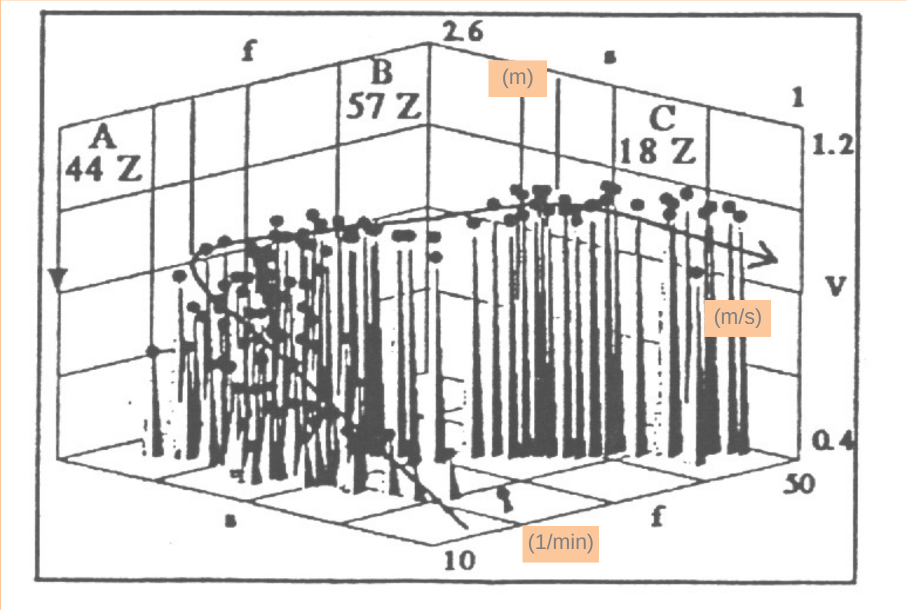


Abb.33: Zustandsraum (Z = Zyklen).

In Abbildung 33 lassen sich drei unterschiedliche Zustandsräume unterscheiden, die charakteristisch für eine ansteigende Belastung sind. Während den ersten Belastungsstufen in Raum A erfolgt ein Einpegeln des Systems bei bestehendem Gleichgewicht zwischen Belastung und Beanspruchung. Vortrieb und auch Geschwindigkeitssteigerungen werden energieökonomisch durch einen großen Zyklusweg und eine vergleichsweise geringe Zyklusfrequenz erzeugt.

Raum B laßt sich auch als Gleichgewichtszustand interpretieren, jedoch verändert sich hier das Verhältnis Zyklusweg/Zyklusfrequenz zu ungunsten des Zyklusweges. Die vorangegangene Umbruchsituation ist durch einen entsprechenden Phasenübergang gekennzeichnet (Streuung).

Eine zusätzliche Steigerung der Belastung (Raum C) führt zu einer unökonomischen Bewegungsregulation: Der Zyklusweg wird weiter verkürzt, die Zyklusfrequenz immer mehr erhöht. Hierin zeigt sich die zunehmende Ermüdung.

Es entstehen also im Sinne einer Bildung dynamischer Strukturen deutlich unterschiedliche Ordnungsformen, die man als nervale Bewegungsmuster deuten kann. Die Muskulatur reagiert darauf mit einem koordinierten Zusammenspiel entsprechend dem Bewegungsziel (Attraktor). Die unter den jeweiligen Bedingungen entstehenden Ordnungsformen bilden sich durch Selbstorganisation.

Durch die Änderung des Kontrollparameters durchläuft das System eine Hierarchie selbstorganisierter Strukturen unter Variation von zeitlichen und räumlichen

Parametern. Dies beinhaltet das Einpegeln des Systems von der relativen Ruhe bis zur Leistungsabgabe entsprechend der jeweiligen Belastung und die Vorgänge im Falle der Überforderung.

Zunächst wurde bei steigender Belastung die intrazyklische Struktur der Bewegung beibehalten. Ab einer bestimmten Belastung ging das System dann jeweils zur Sicherung der Leistungsabgabe über einen Phasenübergang in einen anderen Zustandsraum über.

Bei weiterer Belastungserhöhung mit Überschreiten der metabolen Möglichkeiten ist ein Zerfallen der Struktur (Chaosbildung) mit anschließender Reorganisation auf einem höheren Niveau der Leistungsfähigkeit denkbar. (BLASER 1994/S.282/283)

Motorisches Lernen

SCHÖLLHORN (ebd. 1995) zeigt in seiner Studie u.a., wie der motorische Lernprozess systemdynamisch beschrieben werden kann.

Ziel des Experimentes war die Verbesserung der Diskuswurftechnik eines Zehnkämpfers und eines Spezialisten, da diese azyklische, komplexe Bewegung exemplarisch für eine Vielzahl von Sport- und Alltagsbewegungen betrachtet werden kann. Zum Zwecke der Bewegungsbeschreibung wurden Zeit-, Längen-, Geschwindigkeits-, Winkel-, Winkelgeschwindigkeits- und Drehimpulsmerkmale durch Auswertung von Filmaufnahmen herangezogen. (SCHÖLLHORN 1995/S.105/112-118)

Der Vergleich dieser Merkmale mit einem speziellen Versuch des Spezialisten, der als Idealtechnik ausgewählt wurde (Referenzmuster), diente als Grundlage für die Ansteuerung. Wesentlich dabei sind die Ähnlichkeitsmaße der zeitkontinuierlichen Merkmale, die man als Ordnungsparameter ansehen kann. Durch derartige Veränderungen der Verlaufscharakteristik von Merkmalen -durch S-Faktorenanalyse gewonnen- können prozessuale Veränderungen festgestellt werden. (SCHÖLLHORN 1995/S.120-122/125)

Von großer Bedeutung für das motorische Lernen sind die sogenannten Intermittenzen (größere Schwankungen) der Bewegung, da sie nach KELSO/deGUZMAN (ebd. 1992) als spontane Verhaltensänderungen im Zuge einer Anpassung an variable Verhältnisse aufzufassen sind.
(SCHÖLLHORN 1995/S.164)

So ist beispielsweise beim Spezialisten bezüglich mehrerer Merkmale ein Phasenübergang nach dem dritten Versuch zu beobachten, der sich in einer qualitativen Änderung der Verlaufsmuster zeigt. Hier sind zwei Phänomene zu unterscheiden, die jeweils bei unterschiedlichen Merkmalen in Erscheinung treten:

- Die ersten drei und letzten fünf Versuche zeigen wenig Ähnlichkeit im Verlauf einiger Winkelgeschwindigkeitsmerkmale,

- die ersten drei Versuche unterliegen gegenüber den letzten fünf bezüglich der rechten Fuß- und Schulterwinkelgeschwindigkeiten stärkeren Schwankungen.

Der erste Fall läßt sich als zunehmende Fluktuation in Hinblick auf eine bevorstehende Änderung des Bewegungsmusters (Technikänderung) deuten, während das zweite Phänomen als abklingende Schwankung nach einem Phasenübergang interpretiert werden kann. (SCHÖLLHORN 1995/S.196)

Ebenso ist zwischen dem dritten und vierten Versuch hinsichtlich des Drehimpulses des rechten Arms um die x-Achse durch den Körperschwerpunkt eine Umstellung des Bewegungsmusters festzustellen.

Diese Änderung der relativen Armbewegung des Wurfarms kann jedoch nicht ohne weiteres auf die alleinige Aktivität der Schulter- und Brustmuskulatur zurückgeführt werden, da sich der Drehimpuls des Armes genauso durch die Fixation des Schultergelenks oder auch durch die Änderung der Bewegung des Rumpfes verändern kann (Intersegmentelle Dynamik).

Eine diesbezügliche Bestätigung findet sich in dem parallelen Ähnlichkeitsverlauf des Rumpfdrehimpulses, der auf eine Ansteuerung von Merkmalen zu Beginn der zweistützigen Abwurfphase zurückgeführt werden kann. Die erfolgreiche Ansteuerung des eingangs in Wurfrichtung zu weit links gesetzten Fußes des Stemmbeins und des zu weit in Wurfrichtung gedrehten Oberkörpers (Ansteuerung über Wurfarmlagewinkel) bewirkte eine Änderung des Drehimpulsverlaufs bzgl. der x-Achse. Die vorher ab dem Aufsetzen des linken Fußes nur nach links stattfindende Rumpfbewegung erfolgte nun zunächst nach rechts und dann nach links. (SCHÖLLHORN 1995/S.199)

Die Analyse der Ähnlichkeiten von Merkmalsgruppen ergibt für den Spezialisten eine disjunkte Partitionierung der ersten drei bzw. letzten fünf Würfe. Ein solcher Wechsel zwischen Äquivalenzklassen wird nach HAKEN/WUNDERLIN (ebd. 1991) als "strukturelle Instabilität" bezeichnet.

Der spontan auftretende Wechsel der Ähnlichkeit ist hier mit stärkeren Schwankungen verbunden, während die Fluktuationen sowohl vor als auch nach dem Phasenübergang relativ gering sind (Stabilität). Eine Deutung dieser Befunde in Richtung auf eine überdauernde Veränderung des Bewegungsmusters liegt daher nahe.

Die insgesamt größeren Fluktuationen des Zehnkämpfers erreichen offenbar nicht den für eine Technikänderung notwendigen Wert.
(SCHÖLLHORN 1995/S.201/202)

Die Winkelgeschwindigkeitsmerkmale weisen im Vergleich zu anderen Merkmalen allgemein geringere Ähnlichkeiten auf. Die Dynamik einer Bewegung ist demnach schwieriger nachzuvollziehen als ihre Geometrie. Diese Erkentnisse sind konform mit der üblichen Unterteilung des Lernprozesses in Lernstufen: So wird beispielsweise bei MEINEL (ebd.1977) oder bei ROTH/WILLIMCZIK (ebd. 1983) die "Grobform" mit einer groben Übereinstimmung der Geometrie und die "Feinform" mit einer Ähnlichkeit des Bewegungsflusses bzw. der Gelenkgeschwindigkeiten charakterisiert.
(SCHÖLLHORN 1995/S.203)

Der Spezialist ist gegenüber dem Zehnkämpfer in der Lage aus verschiedenen Anfangspositionen das erlernte Muster zu reproduzieren. Die Strukturierung der Bewegung kristallisiert sich also erst mit dem entsprechenden Technikniveau heraus. Auch hier sei auf die Parallele zur Definition von Lernstufen, die im fortgeschrittenen Stadium die Ausführung einer Bewegung unter wechselnden Bedingungen fordern, hingewiesen.
(SCHÖLLHORN 1995/S.207)

Die aufgezeigte Anwendbarkeit des systemdynamischen Ansatzes auf das motorische Lernen bezieht sich auf alle an der Bewegung beteiligten Systeme: Analoges Systemverhalten kann auf ZNS-Ebene (FUCHS e.a. 1992) sowie auf EMG-Ebene (KELSO 1995) und auf verschiedenen Mehrgelenkebenen (KELSO e.a. 1991 u.1992) beobachtet werden.
(SCHÖLLHORN 1996/S.3)

Hier schließt sich nun der bereits beschriebene Kreis, wir begeben uns allerdings eine Ebene höher und kommen zurück zu den Zahlen.

Meta-Physik der Zahlen als mögliche Interpretation! Odr?

0 ist das Nichts und gleichzeitig Alles, das Nirvana, die Schöpfung und der Schöpfer, reines Bewusstsein, das Feld aller Möglichkeiten, unendliche Weiten, die Quelle allen Seins, unbeschreiblich und unergründlich, aber immer da, in endlosen Zyklen...

1 ist die Einheit und die Einsamkeit, das Ich bin der Herr dein Gott, Einssein mit allem und das Einmalig-Sein, All•ein-Sein, die Selbst-Verständlichkeit, Fokussierung...

-1 ist die Kenntnis, dass alles auch ganz anders sein kann, der Wandel, die Entwicklung...

2 ist die Zweisamkeit, die Polarität, materielle Welten, die irdische Show-Bühne, die Zerstreuung, die Entfaltung, Sexiness...

3 ist die Dreieinigkeit, der Frieden☮, Hier & Jetzt...

7 ist... verflixt, keine Ahnung, ein gutes Pils braucht angeblich sieben Minuten und ist dann doch viel zu herb...

∞ ist die Unendlichkeit.
Hier schließt sich der Kreis...
Wobei sich die Unendlichkeit auch schon zwischen den Zahlen findet. Manchmal auch zwischen den Zeilen…

Vielleicht besteht die ganze Schöpfung ja eigentlich aus Zahlen…
Aber vielleicht ist auch das nur eine Illusion in unseren Köpfen...